The correlation structure of security returns

1.4. Modelo de Índice de Mercado (MIM)
1.5. Modelo Multi-Índice (MMI)

Maria Teresa Medeiros Garcia

ISEG, UL

MIF, 2017-2018

1.The Single-Index Model

A ideia do modelo é simplificar a **estrutura correlacional** da teoria da carteira de forma a reduzir a informação necessária.

Sharpe, William F. (1963), A Simplified Model for Portfolio Analysis, *Management Science*, Vol. 9, No. 2 (Jan., 1963), pp. 277-293.

Outline

- Informação necessária à implementação da teoria da carteira
- O modelo de um índice - o caso particular do modelo índice de mercado
- O rendimento esperado e a variância de um activo no modelo índice de mercado
- A covariância entre dois activos no modelo índice de mercado
- Decomposição do risco de um activo
- Rendimento esperado e risco de uma carteira de activos no modelo índice de mercado
- Utilização do modelo índice de mercado
- Uma medida do risco não diversificável

Para deduzir a Fronteira Eficiente precisamos de resolver o sistema:

- Taxa de rendimento esperada da carteira:

$$\overline{R}_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{R}_i$$

,

- Variância da carteira:

$$\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Informação necessária à implementação da teoria da carteira

Para aplicar a teoria da carteira é necessário obter estimativas das seguintes variáveis:

- $\overline{R}_i$, taxa de rendimento esperada de cada activo incluído na carteira (N);
- σ_i^2, a variância da taxa de rendimento de cada activo incluído na carteira (N);
- ρ_{ij}, coeficientes de correlação entre as rentabilidades de cada par de activos incluídos na carteira [N(N-1)/2].

Limitações

Em relação às estimativas referentes ao **rendimento esperado** e à **variância** de cada activo, é de admitir que os analistas de activos financeiros sejam capazes de produzir ou possuir esses dados, dado que a sua função consiste nisso mesmo.

Em relação aos **coeficientes de correlação** entre as rentabilidades dos vários activos incluídos na carteira já não é tão provável que isso aconteça:

- verifica-se que a própria forma de organização das empresas que operam nesta área, dificulta a produção de estimativas para os coeficientes de correlação, dado que, cada analista se dedica a um sector, o que condiciona a determinação da relação entre o rendimento de dois activos que pertençam a sectores de actividade distintos.
- se é verdade que são precisos N rendimentos esperados e outra tantas variâncias, no que diz respeito aos coeficientes de correlação é necessário calcular [N(N-1)/2] coeficientes de correlação.
- Para um número razoável de activos o cálculo revela-se uma tarefa de grande dimensão. Por exemplo, com N=20 é necessário obter 190 coeficientes de correlação. Com N=30, serão necessários 435 coeficientes e um total de (2x30 + 30x29/2) =495 estimativas de input.

Informação necessária à implementação da teoria da carteira

Portanto, para tornar a teoria da carteira operacional é necessário, ou pelo menos conveniente, **reduzir o volume de informação** necessário, em particular no que diz respeito aos coeficientes de correlação.

Uma forma de proceder à redução da informação consiste em admitir que um determinado modelo é capaz de descrever, ou prever, a **estrutura de correlações entre os vários activos**.

O **modelo de um índice** é um modelo desenvolvido por forma a produzir previsões em relação aos coeficientes de correlação. Mais concretamente, este modelo assume que as correlações entre os rendimentos dos vários activos incluídos na carteira são devidas a um **único factor comum**, ou, de outro forma, dependem de um único índice.

Modelo de um índice - o caso particular do modelo índice de mercado

- Observando os preços dos activos, pode constatar-se que quando o mercado atravessa um período de crescimento (medido por um índice de mercado), então a maioria dos activos tende a ver os seus preços subirem, e quando o mercado está numa fase depressiva, a maioria dos activos vê os seus preços descer.
- Esta observação permite avançar com a seguinte **ideia**: uma razão pela qual os rendimentos dos activos podem estar correlacionados é a de que eles **respondem** de uma forma semelhante às alterações do mercado, pelo que uma boa medida para a correlação entre activos pode ser obtida através da relação entre o rendimento de cada um dos activos e o **rendimento de um índice de mercado**.

Modelo de um índice - o caso particular do modelo índice de mercado

Esta ideia pode ser formalizada da seguinte forma

$$R_i = a_i + \beta_i R_M$$

onde

Ri - taxa de rendimento do activo i;

ai - componente do rendimento do activo i que é independente do desempenho do mercado, que constitui uma variável aleatória;

RM - taxa de rendimento do mercado medido com base num índice de mercado;

$\beta_i = \frac{dR_i}{dR_m}$ - constante que mede a alteração esperada na taxa de rendimento do activo *i* dada uma alteração na taxa de rendimento do mercado medido pelo índice de mercado.

Modelo de um índice - o caso particular do modelo índice de mercado

A equação desagrega o rendimento de um activo em duas componentes:

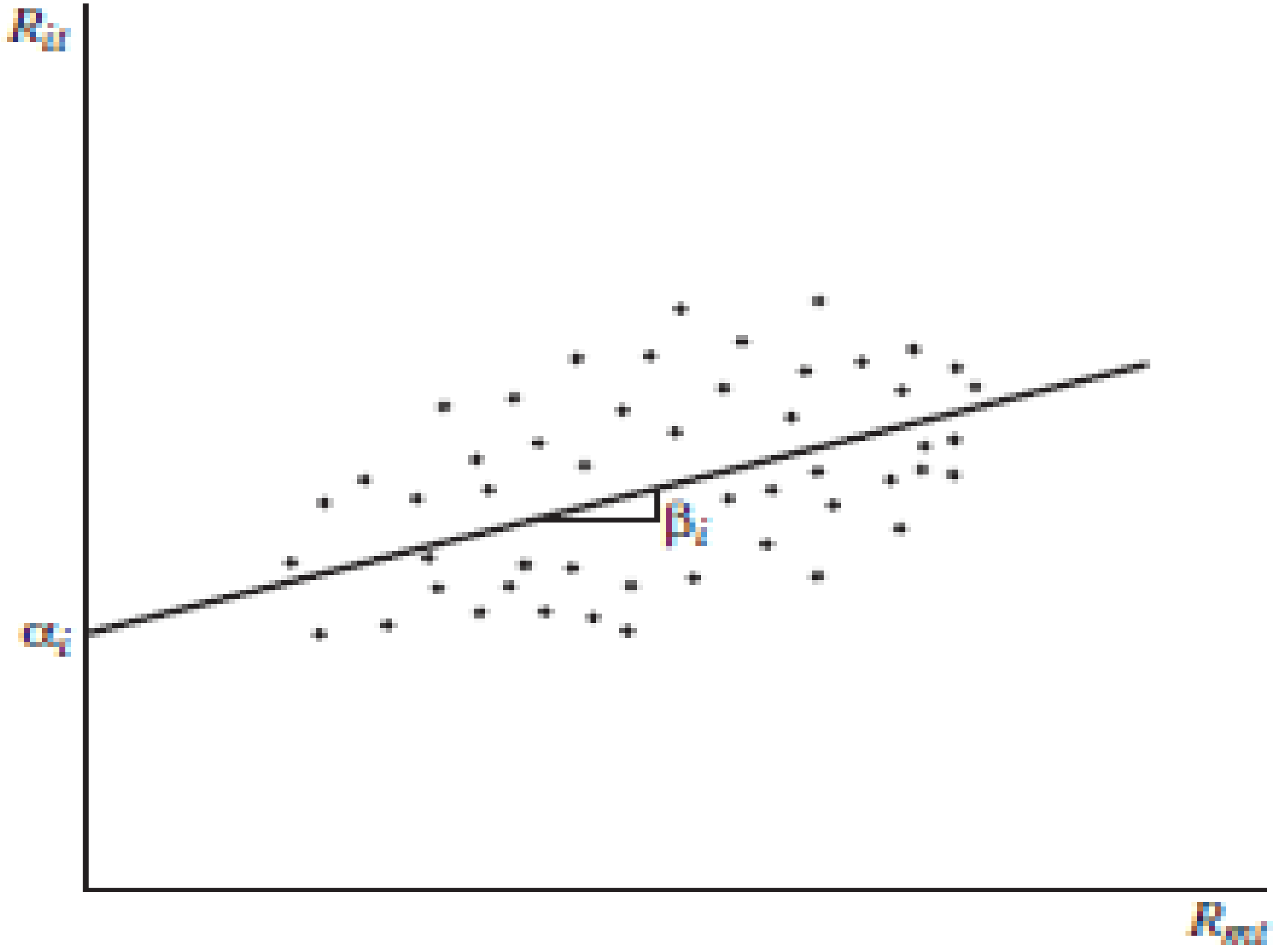
- a componente devida ao mercado $\beta_i R_M$, onde β_I representa a medida da sensibilidade do rendimento do activo *i* às variações no rendimento do mercado;

- a componente do rendimento do activo *i* independente da evolução do rendimento de mercado,o parâmetro *a*i, que pode ser decomposto em duas parcelas:

- α_i o valor esperado de *ai*;

- e_i variável aleatória correspondente à incerteza.

Graficamente (Single-index model):



Modelo de um índice - o caso particular do modelo índice de mercado

O modelo de índice de mercado $R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + e_i$ pressupõe as seguintes **hipóteses**:

a) A variável aleatória *ei* apresenta um valor esperado nulo e um desvio padrão σ_{e_i} .

b) *ei* não está correlacionado com *RM*, formalmente: $Cov(e_i, R_M) = \sigma_{e_i M} = E\left[(e_i - 0)(R_M - \overline{R}_M)\right] = 0$

Esta hipótese implica que o desempenho da equação enquanto equação que explica o rendimento do activo *i,* é independente do nível de rendimento que o mercado produz. Esta não é a hipótese fundamental que caracteriza este modelo, dado que depois de se estimarem os parâmetros α_i, β_i e $\sigma_{e_i}^2$ com base numa regressão, então temos a garantia de que *ei* e *RM* não estão correlacionados;

c) *ei* é independente de *ej*, formalmente: E(ei, ej) = 0

Esta é uma hipótese característica do modelo que o diferencia de todos os outros modelos usados para descrever a estrutura da covariância ou das correlações. A implicação que se retira desta hipótese é que a única razão pela qual os rendimentos dos activos variam em conjunto, de forma sistemática, é a correlação comum dos activos com o mercado, isto é, não existem outros efeitos para além do mercado que sejam responsáveis pelo movimento comum dos rendimentos entre activos. Neste caso, o método de estimação utilizado nada garante sobre a independência entre *ei* e *ej*.

Pressupostos básicos do modelo índice de mercado - síntese

E(ei) = 0 para todos os activos i = 1, 2,...,.N.

$Cov(e_i, R_M) = \sigma_{e_i M} = E\left[(e_i - 0)(R_M - \overline{R}_M)\right] = 0$ para todos os activos i = 1, 2,...,.N .

$E(e_i,\ e_j) = 0$,para todos os pares de activos i, j = 1, 2,...,.N com i≠j.

$Var(e_i) = E(e_i^{\,2}) = \sigma^2_{e_i}$ para todos os activos i = 1, 2,...,.N.

$$Var(R_M) = E(R_M - \overline{R}_M)^2 = \sigma^2_M.$$

O rendimento esperado e a variância de um activo no modelo índice de mercado

Taxa de rendimento esperada

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i \overline{R}_M$$

Variância

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{e_i}^2$$

A covariância entre dois activos no modelo índice de mercado

Covariância

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_M^2$$

Decomposição do risco de um activo

Sendo

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{e_i}^2$$

O risco é composto por dois elementos:

- o primeiro, $\beta_i^2 \sigma_M^2$, a parcela de risco que é inerente ao mercado, designado por **risco de mercado**, risco **sistemático** ou **não diversificável**;
- o segundo elemento é um risco próprio do activo *i*, sendo exclusivamente inerente ao activo em questão, por isso mesmo é designado por **risco específico**, **não sistemático** ou **diversificável**.

O risco total não é mais do que a soma do risco de mercado com o risco do próprio do activo.

O **primeiro** tipo de risco não é diversificável, dado que depende de acontecimentos macro-económicos que afectam todo o mercado e, portanto, todos os activos desse mercado.

O **segundo** tipo de risco depende de acontecimentos micro-económicos que apenas afectam o activo *i* e que, portanto, pode ser diversificado, ou seja, eliminado pela diversificação no contexto de uma carteira de activos.

Rendimento esperado e risco de uma carteira de activos no modelo índice de mercado

Rendimento esperado

$$\overline{R}_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i \overline{R}_M$$

$$\overline{R}_p = \alpha_p + \beta_p \overline{R}_M$$

Variância

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_M^2 + \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_{e_i}^2$$

com

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i \qquad \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{p}} = \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{x}_{\mathbf{i}} \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{i}}$$

A utilização do modelo índice de mercado

Atendendo às equações anteriores é possível estimar o rendimento esperado e o risco de uma carteira no contexto do modelo de índice de mercado. Para tal, é necessário obter estimativas para os seguintes elementos:

- N estimativas para α_i (uma para cada activo);
- N estimativas para β_i (uma para cada activo);
- N estimativas para $\sigma^2_{e_i}$ (uma para cada activo);
- uma estimativa para $\overline{R}_M$ e outra para σ^2_M.

No total são necessárias 3N + 2 estimativas enquanto que utilizando a teoria da carteira seriam necessárias 2N + N(N-1)/2 estimativas. Por exemplo, para uma carteira composta por 25 activos, no modelo de Markowitz será necessária informação relativamente a 350 variáveis enquanto que no contexto do modelo de índice de mercado apenas é preciso ter informação sobre 77 variáveis. Para N=30, são necessários (3x30+2)=92 dados de input.

Uma medida do risco não diversificável

Dado

$$\overline{R}_p = \alpha_p + \beta_p \overline{R}_M$$

Caso se considere a carteira de mercado, então o rendimento esperado dessa carteira será $\overline{R}_M$. Tem-se então que, para qualquer valor de $\overline{R}_M$, os únicos valores para αp e βp que garantem a igualdade $\overline{R}_p = \overline{R}_M$ são $\alpha p = 0$ e $\beta p = 1$.

Trata-se de uma ilação óbvia uma vez que o parâmetro beta, estimado através do Método dos Mínimos Quadrados, com a mesma série para a variável dependente e para a variável independente, só pode ser a unidade.

Portanto, sendo o **beta da carteira de mercado igual a 1**, os activos são considerados mais ou menos arriscados consoante o beta de cada activo é maior ou menor que a unidade, em termos absolutos. Activos cujo beta seja maior que um são designados **ofensivos** e activos cujo beta seja menor que um são designados **defensivos**.

Uma medida do risco não diversificável

Analisando o risco de uma carteira de N activos,

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_M^2 + \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_{e_i}^2$$

vimos que este se divide o risco total em duas componentes:

- a primeira componente diz respeito ao **risco de mercado**, não diversificável ou sistemático, e
- a segunda componente diz respeito ao **risco específico**, diversificável ou não sistemático.

Uma medida do risco não diversificável

Admitindo, por exemplo, que o investidor investe proporções iguais em cada um dos N activos, ou seja, *x=(1/N)*, o risco da carteira pode ser apresentado da seguinte forma

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_M^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \sigma_{e_i}^2$$

onde $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \sigma_{e_i}^2 = \overline{\sigma}_{e_i}^2$ representa o risco residual médio da carteira.

Uma medida do risco não diversificável

Então, com N suficientemente grande, o risco específico tende para zero, ou seja, para uma carteira de dimensão significativa, ou mesmo moderada, pode considerar-se que esta componente do risco é efectivamente nula. Por outro lado, a outra componente do risco da carteira, $\beta_p^2\sigma_M^2$, mantém-se, pelo que o risco da carteira vem

$$\sigma_p = \left(\beta_p^2 \sigma_M^2\right)^{\frac{1}{2}} = \beta_p \sigma_M = \sigma_M \sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i$$

Como σ_M é uma constante para qualquer activo *i*, o coeficiente β_i pode ser entendido como uma medida para a contribuição do activo *i* para o risco da carteira.

Uma medida do risco não diversificável

Aplicando este resultado ao risco de um activo tem-se que o risco vem:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{e_i}^2$$

Naturalmente que $\sigma_{e_i}^2$ pode ser diversificado no contexto de uma carteira, sendo designado por risco diversificável, não sistemático ou específico.

Por outro lado, a componente $\beta_i^2 \sigma_M^2$ não é diversificável sendo assim designada por risco de mercado. Sendo σ_M^2 uma constante para cada activo *i*, então é possível considerar β_i como uma **medida do risco** não diversificável, sistemático ou de mercado, de cada activo *i*.

Por esta mesma razão, por vezes considera-se que β_i é uma **medida do risco** de um activo *i* qualquer.

Estimação dos betas

- Utilizando o método do mínimos quadrados vem:

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum_{t=1}^{M} (R_{it} - \overline{R}_{it})(R_{mt} - \overline{R}_{mt})}{\sum_{t=1}^{M} (R_{mt} - \overline{R}_{mt})^2} = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$

e

$$\hat{\alpha}_i = \overline{R}_{it} - \hat{\beta}_i \overline{R}_{mt}$$

2.Multi-Index Model

A ideia continua a ser a de simplificar a da teoria da carteira.

Para tal admite-se que a correlação entre os vários activos se deve a um conjunto de **factores económicos e estruturais (ou efeito indústria)**, para além do rendimento de mercado, isto é, a evolução conjunta dos rendimentos dos vários activos deve-se a mais do que um factor ou índice.

Por outro lado, um único factor pode não explicar as taxas de rendimentos dos activos.

Outline

- O modelo geral
- Rendimento esperado e risco dos activos
  - O rendimento esperado de um activo
  - A variância de um activo
  - A covariância entre dois activos
- Rendimento esperado e risco de uma carteira de activos
- A utilização do modelo multi-índice

O modelo geral

A equação base é dada por

$$R_i = a_i + b_{i1}I_1 + b_{i2}I_2 + \ldots + b_{iL}I_L + c_i$$

onde

Ri – taxa de rendimento do activo i;

I_j - o nível actual do factor/índice j, um factor que se considera relevante para explicar o rendimento do activo i e a correlação entre os vários activos;

b_{ij} - medida da resposta ou sensibilidade do rendimento do activo i a alterações no índice j;

L - número de índices ou factores explicativos.

Pressupostos

E(ci) = 0, para todos os activos *i* = 1, 2,...,.N.

$$Cov(I_K, I_j) = E\left[(I_k - \bar{I}_k)(I_j - \bar{I}_j)\right] = 0,$$

os índices não estão correlacionados entre si, isto é, que os índices são ortogonais entre si, com j = 1, 2, ..., L; k = 1, 2, ..., L e J≠k

$$\mathrm{Cov}(c_i, I_j) = \sigma_{c_i I_j} = \mathrm{E}\left[(c_i - 0)(I_j - \bar{I}_j)\right] = 0$$

para todos os activos i = 1, 2,...,.N

$E(c_i, c_j) = 0$, para todos os pares de i,j = 1, 2,...,.N com i≠j.

Por outro lado, e por definição, tem-se também, a variância residual do activo i

$$Var(c_i) = E(c_i)^2 = \sigma^2_{c_i}$$

para todos os activos i = 1, 2,...,.N.

Variância do índice j $Var(I_j) = E(I_j - \bar{I}_j)^2 = \sigma^2_{I_j}$ para j = 1, 2, ..., L.

Rendimento esperado e risco de um activo

- Rendimento esperado

$$E(R_i) = a_i + b_{i1}\bar{I}_1 + b_{i2}\bar{I}_2 + \ldots + b_{iL}\bar{I}_L \, .$$

- Variância

$$\sigma_i^2 = E(R_i - \bar{R}_i)^2$$

$$\sigma_i^2 = E\left[(a_i + b_{i1}I_1 + b_{i2}I_2 + \ldots + b_{iL}I_L + c_i) - (a_i + b_{i1}\bar{I}_1 + b_{i2}\bar{I}_2 + \ldots + b_{iL}\bar{I}_L)\right]^2$$

$$\sigma_i^2 = b_{i1}^2\sigma_{I_1}^2 + b_{i2}^2\sigma_{I_2}^2 + \ldots + b_{iL}^2\sigma_{I_L}^2 + \sigma_{C_i}^2$$

Covariância entre dois activos

$$\sigma_{ij} = b_{i1} b_{j1} \sigma_{I_1}^2 + b_{i2} b_{j2} \sigma_{I_2}^2 + \ldots + b_{iL} b_{jL} \sigma_{I_L}^2$$

Rendimento esperado e risco de uma carteira de activos

- Taxa de rendimento esperada

$$E(R_p) = a_p + b_{p_1}\bar{I}_1 + b_{p_2}\bar{I}_2 + \ldots + b_{p_L}\bar{I}_L$$

- Variância

$$\sigma_p^2 = b_{p_1}^2\sigma_{I_1}^2 + b_{p_2}^2\sigma_{I_2}^2 + \ldots + b_{p_L}^2\sigma_{I_L}^2 + \sigma_{c_p}^2$$

com

$$\sigma_{c_p}^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2\sigma_{c_i}^2$$

Utilização do modelo multi-índice

Com as equações apresentadas atrás é possível estimar o rendimento esperado e risco de uma carteira no contexto do modelo multi-índice. Para tal é necessário obter estimativas para os seguintes elementos:

- N estimativas de ai (uma para cada activo);
- LxN estimativas dos b_{ik} (uma para cada activo e para cada índice);
- N estimativas de $\sigma^2_{c_i}$ (uma para cada activo);
- L estimativas de $\bar{I}_j$ e de $\sigma^2_{I_j}$ (uma para cada índice).

São assim necessárias 2N + 2L + LN estimativas, enquanto que adoptando a teoria da carteira seriam necessárias 2N + N(N-1)/2 estimativas.

Limitação: Quais os factores e número de factores a incluir? Acaba por ser uma questão resolvida pela econometria.

Estudos empíricos

O modelos multi-índice podem ser divididos em três categorias:

Modelos macroeconómicos: comparam a taxa de rendimento do activo com fatores como o emprego, a taxa de inflação e a taxa de juro.

Modelos fundamentais: comparam a taxa de rendimento do activo com indicadores financeiros com ela relacionados (por exemplo, resultados, dimensão, book-to-market, e rendimento em excesso do mercado).

Modelos estatísticos: são utilizados para comparar as taxas de rendimento dos diferentes activos baseados no desempenho estatístico.

Um exemplo

Fama, E., & French, K. (1993). Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of Financial Economics*, 33(1), 3-56.

Market; Size; Book-to-Market equity